Tema 1

1. Hallar las componentes del momento angular en coordenadas esféricas y cilíndricas.

2. Una partícula se mueve de forma que su momento angular $\mathbf{L}$ es nulo para todo t. Probar que o bien la partícula está en reposo o bien su trayectoria es una recta que pasa por el origen

3*. Sea s la longitud de arco a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r}(s)$ seguida por una partícula. El *vector unitario normal* $\mathbf{n}$ a lo largo de dicha curva se define mediante la relación $\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa\mathbf{n}$, donde $\mathbf{t} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}$ es el vector unitario tangente a la curva y $\kappa \equiv \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s}\right| \geq 0$. La función $\kappa(s)$ es por definición la *curvatura* de la curva en el punto $\mathbf{r}(s)$, y $1/\kappa(s) \equiv R(s)$ es su *radio de curvatura*. i) Probar que $|\mathbf{t}| = 1$ y $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$ en todo punto de la curva. ii) Demostrar que $v = \mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t$ y expresar las componente tangencial y normal de la aceleración $\ddot{\mathbf{r}}$ en función de v, $\dot{v}$ y R.

4. Una partícula se mueve con velocidad de módulo constante v sobre la curva plana (cardioide) $r = k(1 + \cos\varphi)$. Calcular $\dot{\varphi}$, a_r y $|\mathbf{a}|$ en función de φ, v y k.

5. Indicar cuáles de los siguientes campos de fuerzas son conservativos y, en su caso, calcular la energía potencial correspondiente (a, b y c son constantes): a) $\mathbf{F} = (ayz + bx + cz)\,\mathbf{e}_1 + (axz + bz)\,\mathbf{e}_2 + (axy + by)\,\mathbf{e}_3$, b) $\mathbf{F} = -z\mathrm{e}^{-x}\mathbf{e}_1 + \log z\,\mathbf{e}_2 + (\mathrm{e}^{-x} + y/z)\,\mathbf{e}_3$, c) $\mathbf{F} = a\mathbf{r}/r^2$.

6. Una partícula está sometida a una fuerza $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ dependiente de la velocidad que verifica la condición $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria C. a) Dar un ejemplo físico de una fuerza de este tipo. b) ¿Es $\mathbf{F}$ necesariamente conservativa? c) ¿Se conserva la energía de la partícula?

7. Un monopolo magnético es un (hipotético) campo magnético de la forma $\mathbf{B} = b\mathbf{r}/r^3$, donde b es una constante proporcional a la supuesta carga magnética. a) Escribir las ecuaciones de Newton para el movimiento de una partícula de carga q y masa m en presencia del monopolo y de un campo central con potencial $V(r) = -k/r$. b) Comprobar que el momento angular $\mathbf{L}$ no se conserva. c) Hallar un vector conservado estudiando cómo varía el par $\mathbf{N}$ con el tiempo.

8*. Una partícula de carga q y masa m se mueve en el seno del campo magnético $\mathbf{B} = b\mathbf{r}/r^3$ creado por un (hipotético) monopolo magnético. a) Probar que el módulo de la velocidad de la partícula es constante. b) De lo anterior y la relación $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = 0$ deducir la ecuación del movimiento de la coordenada r y hallar su solución general suponiendo que $\dot{r}(0) = 0$. c) Determinar el movimiento de las coordenadas θ y φ utilizando la conservación del vector $\mathbf{J} = \mathbf{L} - qb\mathbf{e}_r$. d) Describir la trayectoria seguida por la partícula. [*Ayuda para el apartado c):* escoger los ejes de forma que $\mathbf{J} = J\mathbf{e}_z$.]

9. Una partícula de masa m que se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0 está sometida a un campo gravitatorio constante dirigido hacia abajo y a una fuerza de rozamiento proporcional al cuadrado de la velocidad. Calcular la velocidad que tiene la partícula al volver a su punto de partida.

10*. Se lanza una partícula de masa m desde el punto más alto de de una esfera maciza de radio R con velocidad v_0 sometida a la gravedad terrestre. Calcular el ángulo $\theta_{\max}$ formado por la vertical y el punto en que la partícula abandona la superficie de la esfera en función de v_0. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar $\theta_{\max}$? [*Ayuda:* la componente radial de la fuerza de reacción de la superficie no puede ser negativa.]

11. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión sometida a la fuerza $F(x) = k(x^2 - a^2)$, con k, a constantes positivas. Si $x(0) = -a$ y $\dot{x}(0) = v_0$, describir cualitativamente el movimiento de la partícula en función de su velocidad inicial v_0.

12. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión sometida a una fuerza $F(x) = -kx + kx^3/a^2$, donde k y a son constantes positivas. Calcular la energía potencial correspondiente con la elección $V(0) = 0$ y discutir cualitativamente el movimiento de la partícula. ¿Qué ocurre si $E = ka^2/4$?

13. Una partícula de masa unidad se mueve en una dimensión sometida al potencial $V(x) = \sin^2 x$ (en unidades apropiadas). Si la partícula se halla inicialmente en el origen con velocidad $\sqrt{2}$, describir cualitativamente el movimiento para $t > 0$ y hallar su ley horaria.

14*. Una partícula de masa $m = 2$ y energía $E = 0$ parte del origen en $t = 0$ moviéndose hacia la derecha sometida al potencial unidimensional $V(x) = -(1 - x^2)(1 - k^2x^2)$ (en unidades apropiadas), donde $k \in [0, 1]$ es un parámetro. i) Probar que si $k \in [0, 1)$ el movimiento es periódico, y hallar su amplitud y período. ¿Qué ocurre si $k = 1$? ii) La solución $x(t)$ de la ecuación del movimiento del apartado anterior recibe el nombre de *seno elíptico de Jacobi*, y se suele denotar por $\mathrm{sn}(t; k)$. La cuarta parte de su período (para $0 \leq k < 1$) se denomina *integral* *elíptica completa de primera especie* y se denota por $K(k)$. Expresar $\operatorname{sn}(t;0)$ y $\operatorname{sn}(t;1)$ en términos de funciones elementales, y calcular $K(0)$. ¿Cuánto vale $K(1)$? iii) Expresar la solución de la ecuación del movimiento con $E=0$ y $x(0)=1/k$ (siendo $0\le k<1$) en términos de sn. ¿Cuánto tarda la partícula en alcanzar el infinito?

15*. Probar que la solución de la ecuación del péndulo simple $\ddot\theta+(g/l)\sin\theta=0$ con las condiciones iniciales $\theta(0)=\theta_0\in(0,\pi)$, $\dot\theta(0)=0$ es $\sin(\theta/2)=k\operatorname{sn}\bigl(K(k)-\sqrt{g/l}\,t;k\bigr)$, donde $k=\sin(\theta_0/2)$, y su período es $4K(k)\sqrt{l/g}$. [*Ayuda:* efectuar el cambio de variable $\sin(\theta/2)=kx$ en la ecuación de la energía.]

16. Una partícula de masa m sometida al potencial unidimensional $V(x)=kx^2(3a-2x)$ (con $k,a>0$) se halla inicialmente en el punto $x=a/2$ con velocidad v_0. Determinar para qué valores de v_0 el movimiento es no acotado, y si en tal caso es finito o infinito el tiempo empleado por la partícula en alcanzar el infinito.

17. Una partícula de masa m obligada a moverse sobre una curva en un plano vertical describe un movimiento armónico simple de período $T=2\pi\sqrt{l/g}$ (donde l es una constante con dimensiones de longitud) independiente de la amplitud. Hallar las ecuaciones paramétricas de la curva en cuestión.

18. Hallar la dependencia en la amplitud y la energía del período de las oscilaciones alrededor de $x=0$ de una partícula de masa m que se mueve sometida al potencial $V(x)=k|x|^n$, con $k>0$ y $n\in\mathbb{N}$.

19. Una partícula de masa m se mueve en el plano sometida al potencial $V(x,y)=k(x^2+4y^2)/2$, con $k>0$. Sabiendo que $\mathbf{r}(0)=(a,0)$ y $\mathbf{v}(0)=(0,v_0)$, con $a>0$ y $v_0>0$, determinar el movimiento de la partícula y dibujar aproximadamente su órbita.

20. Un electrón de masa m y carga $-e<0$ se mueve en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}=E\mathbf{e}_2$ y un campo magnético también uniforme $\mathbf{B}=B\mathbf{e}_3$. En el instante inicial $\mathbf{r}(0)=0$ y $\mathbf{v}(0)=v_0\mathbf{e}_1$. Sabiendo que $E>0$, $B>0$ y $v_0>0$, calcular la trayectoria del electrón y dibujarla aproximadamente en los siguientes casos: a) $v_0=E/(2B)$; b) $v_0=E/B$; c) $v_0=2E/B$; d) $v_0=4E/B$.

21. Una partícula de masa m y carga q se mueve en un plano sometida a un campo eléctrico rotatorio de amplitud constante $\mathbf{E}(t)=E_0(\cos\omega t,\sin\omega t)$ (con $E_0>0$). Si la partícula se encuentra inicialmente en reposo en el origen, determinar su movimiento y dibujar aproximadamente su trayectoria.

22. La fuerza entre dos partículas está dada por

$$\mathbf{F}_{12}=k\bigl[\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1-\lambda r(\dot{\mathbf{r}}_2-\dot{\mathbf{r}}_1)\bigr],$$

donde k y λ son constantes positivas y $r=|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|$. Calcular el par interno del sistema y explicar por qué no se anula. ¿Es conservativo el sistema formado por las dos partículas?

23. El campo electromagnético creado por una partícula de carga q que se mueve a lo largo de una trayectoria $\mathbf{x}(t)$ está dado por

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t)|^3}\,,\qquad \mathbf{B}(t,\mathbf{r})=\frac{\mu_0 q}{4\pi}\,\frac{\dot{\mathbf{x}}(t)\times\bigl(\mathbf{r}-\mathbf{x}(t)\bigr)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t)|^3}$$

(se supone que $|\dot{\mathbf{x}}|\ll c$ y $|\mathbf{r}-\mathbf{x}||\ddot{\mathbf{x}}|\ll c|\dot{\mathbf{x}}|$). Estudiar si la fuerza electromagnética entre dos partículas cargadas en movimiento verifica (en esta aproximación) la tercera ley de Newton.

24. Demostrar que el momento angular de un sistema de dos cuerpos se puede escribir en la forma

$$\mathbf{L}=M\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}+\mu\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\,,$$

donde $M=m_1+m_2$, $\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{R}=(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2)/$ es el vector de posición del centro de masas del sistema.